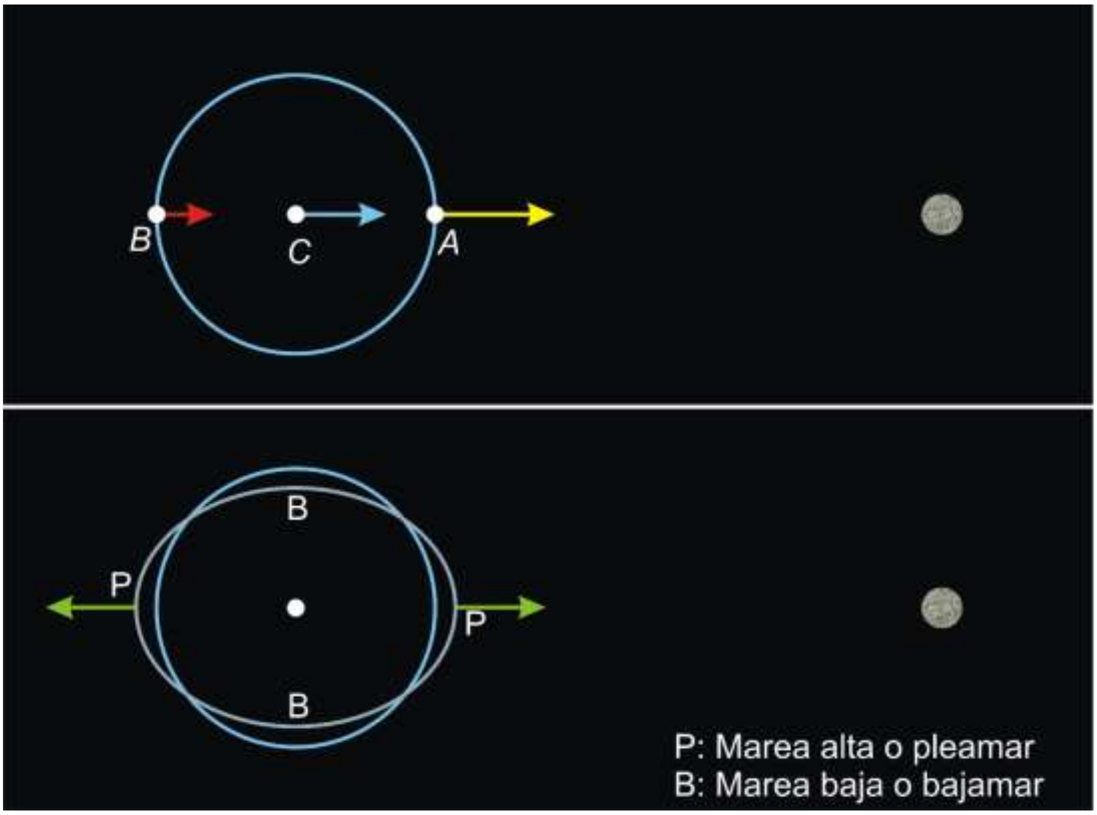
LA FUERZA DE LA MAREA

Artículo publicado en la revista Astronomía, de Madrid, diciembre de 2017
Antonio Bernal González
Twitter e Instagram: @puntovernal

La fuerza de marea es proporcional al cubo de la distancia al cuerpo que la produce. Esa es la solución al abstruso problema de por qué hay dos mareas altas en un día.

En el año 2011 publicamos en Agenda una serie de seis entregas sobre las mareas. Decíamos en esa ocasión que los movimientos de las aguas terrestres dependen de tres tipos de fenómenos: los astronómicos, básicamente las fuerzas gravitatorias del Sol y de la Luna; los geográficos que tienen que ver con la posición sobre el planeta, la profundidad de las aguas y la forma del litoral; los meteorológicos que dependen de variables caóticas y son los más difíciles de prever. La parte astronómica es la más predecible, y su formulación es sencilla pero desconocida y sorprendente. Las órbitas de la Luna y de la Tierra son elipses y eso hace que las distancias, y por tanto las fuerzas gravitatorias sean variables en períodos cortos de tiempo: aumentan cuando las distancias decrecen. Por otro lado, la posición relativa de los tres cuerpos, Sol, Luna y Tierra también cambia y va desde el alineamiento en las fases de Luna Llena y Luna Nueva, cuando es máxima, hasta la cuadratura o ángulo de noventa grados en las fases de cuarto, que es cuando el valor se minimiza.

Para que hagamos conciencia de cómo el fenómeno de la marea astronómica puede sorprendernos, pensemos en la siguiente situación. Tanto el Sol como la Luna atraen a la Tierra con una fuerza que, de acuerdo con la conocida fórmula de Newton, es proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias: más masa implica más atracción y, a su vez, más distancia significa menos atracción. Puesto que se conocen las masas del Sol y de la Luna y las distancias hasta esos astros, podemos calcular las fuerzas gravitatorias. Hallaremos que el Sol atrae a cada kilogramo de la Tierra con una fuerza que es 180 veces más fuerte que la que ejerce la Luna sobre esa misma masa de nuestro planeta. ¿No debería ser, entonces, mayor la marea solar que la lunar? No, no es así. Todos sabemos que la marea producida por la Luna es más del doble que la producida por el Sol. Veamos el porqué.

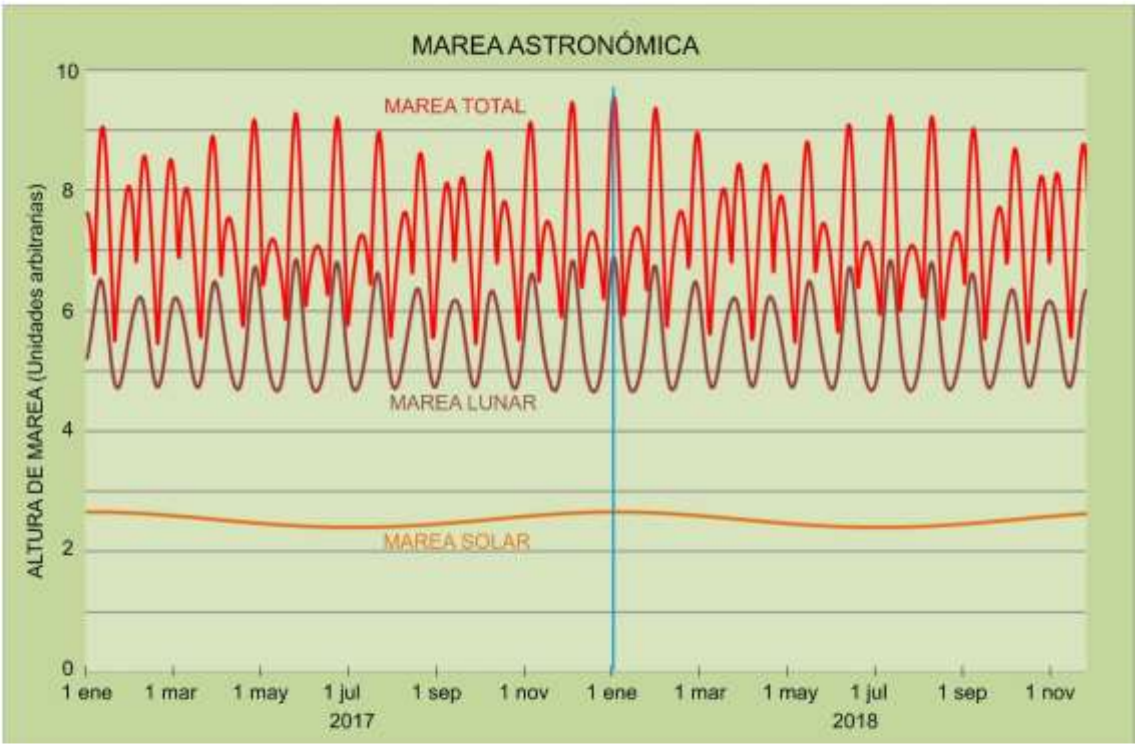


En la parte superior se ven las fuerzas cuyas diferencias producen las mareas, como se explica en el texto; en la inferior se ven los sentidos opuestos de las aceleraciones de marea

En realidad la pleamar y la bajamar no se deben simplemente a que el Sol o la Luna atraen al mar. No. La causante es la diferencia entre las fuerzas con las que estos astros atraen a un kilogramo en la superficie de la tierra, y a un kilogramo en el centro de la misma, como se muestra en la parte de arriba de la primera ilustración. En ella hemos puesto la Tierra como un círculo azul y la Luna a su derecha. Un kilogramo masa colocado en el punto *A* será atraído por la Luna con una fuerza mayor (amarilla) que si estuviera en el centro de la Tierra *C* (azul), puesto que está más cerca de nuestro satélite. La marea que se produce en *A* es proporcional a la diferencia de esas dos fuerzas. Aplicando la ley newtoniana de la gravitación a esos dos puntos, encontramos que la fuerza de marea sobre un kilogramo de agua en la superficie del océano, o aceleración de marea, es inversamente proporcional al cubo de la distancia a la Luna. Mucho ojo: al cubo, no al cuadrado. Los lectores que quieran examinar la formulación matemática –muy fácil, por cierto– pueden verla en la página www.puntovernal.webnode.es.

En el punto *B*, la marea es también proporcional a la diferencia de fuerzas entre *B* y *C.* en este caso, puesto que la fuerza en *B* es menor que en *C*, el valor será negativo, lo cual quiere decir que se levanta una marea en el sentido opuesto a la atracción lunar. Esa es la solución al abstruso problema de por qué hay dos mareas altas en un día: por el hecho paradójico de que al lado opuesto a la posición de la Luna, el mar se separa de ella, como si hubiera una fuerza de repulsión. Ese doble levantamiento o pleamar se ve esquematizado en la parte inferior de la ilustración en la que se muestran en verde las direcciones opuestas de las aceleraciones de marea. También se ve allí que en los puntos que están a 90 grados de la línea Tierra-Luna, ocurre una bajamar. Tanto en las ilustraciones como en las explicaciones hemos supuesto que la Tierra está cubierta por una capa uniforme de agua, lo cual no es cierto pero facilita la comprensión del fenómeno.

Este análisis que hemos hecho para la Luna podría hacerse también para el Sol y la marea resultante sería una combinación de las producidas de manera aislada por cada uno de los astros. En la segunda ilustración se ven los cambios en la altura del mar causados individualmente por el Sol (color naranja) y la Luna (marrón) durante los años 2017 y 2018. La marea resultante es una curva compleja que se muestra en color rojo. En ella se ve que la máxima pleamar durante esos dos años será en los primeros días de enero de 2018 (señalada con línea vertical azul). La razón es que el 3 de enero es la fecha en la que el Sol está más cerca de la Tierra (perihelio) y este año coincidirá con que el día 1 la luna estará en perigeo (punto más cercano a la Tierra) y el 2 será Luna Llena, por lo que los tres astros estarán alineados y las aceleraciones de marea se sumarán. Aunque no se muestre en la ilustración, en los próximos 30 años no se presentarán ni una sola vez unas condiciones astronómicas tan favorables para una pleamar extraordinaria. Esto no quiere decir que estemos vaticinando inundaciones en zonas costaneras, porque recordemos que estos desastres dependen en gran medida de las condiciones meteorológicas. Sólo es una curiosidad de tantas que presenta el admirable fenómeno de las mareas.



Altura de marea producida por el Sol, la Luna y la combinación de ambos, en unidades arbitrarias, durante los años 2017 y 2018. A principios de enero de 2018 la altura será la máxima del período.

ANÁLISIS DE LA ACELERACIÓN DE MAREA

Recordemos ante todo la ecuación de la fuerza de gravedad newtoniana que depende de las masas de los cuerpos que se atraen y es proporción inversa de la distancia al cuadrado:

$$F = \frac{GMm}{d^2}$$

En la que *F* es la fuerza de atracción, *G* es la constante de gravitación = 6,67 x10-11 $m^3/kg\ s^2$, *M* es la masa del astro que produce la marea (en nuestro caso sería el Sol o la Luna) y *m* es la masa del cuerpo atraído, que en este análisis será la unidad de masa o un kilogramo puesto en un lugar dado de la Tierra, por ejemplo en *A*, en *B* o en *C* si nos referimos a la primera figura. La unidad de fuerza es el Newton o kg m /s^2 que al ser ejercida sobre la unidad de masa, representa la aceleración en m/s^2. Puesto que en la fórmula anterior *m* es 1 kg, la aceleración gravitatoria queda

$$A = \frac{GM}{d^2}$$

La distancia desde el cuerpo atractor hasta el punto *A* será *d-r* y la aceleración sobre un kilogramo de masa en ese punto será

$$Aa = \frac{GM}{(d-r)^2}$$

Si a esta expresión le hacemos una transformación algebraica consistente en multiplicar y dividir por *d* el término *r*, la podemos escribir como

$$Aa = \frac{GM}{d^2}\frac{1}{(1-\frac{r}{d})^2}$$

Podríamos analizar igualmente la aceleración de un kilogramo de masa colocado en B y obtendríamos una expresión similar pero con signo positivo en el denominador:

$$Ab = \frac{GM}{d^2}\frac{1}{(1+\frac{r}{d})^2}$$

De manera que se podría escribir la ecuación de forma genérica así:

$$A = \frac{GM}{d^2}\frac{1}{(1\pm\frac{r}{d})^2}$$

En la que la aceleración en los puntos *A* y *B* tiene signos opuestos. Es una ecuación de la forma

$$\frac{1}{(1\pm x)^2}$$

Que se puede expandir como una serie (serie de Taylor) de la siguiente forma:

$$\frac{1}{(1\pm x)^2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 ...$$

Quedando la ecuación para *A* o *B*, así:

$$A = \frac{GM}{d^2} \mp \frac{2GM}{d^2}(\frac{r}{d}) + \frac{3GM}{d^2}(\frac{r}{d})^2 \mp ...$$

Puesto que d es muy grande con respecto a r (en el caso de la Luna es 60 veces más grande y en el del Sol más de 20000 veces mayor), el término r/d con potencias de 2 o superiores, es muy pequeño y se puede despreciar. Por otro lado, el primer término es la aceleración en el centro de la Tierra, según vimos arriba, en la primera ecuación de aceleración. Queda, entonces que la aceleración en A o en B tiene el siguiente valor:

$$A_{a,b} = \pm \frac{2GMr}{d^3}$$

En la que los signos opuestos para A y B significan que en esos dos puntos las aceleraciones tienen direcciones contrarias. Esta aparente paradoja de las mareas se ilustra en la imagen de abajo en la figura, en la que se ve cómo el agua sube en el lado más cercano a la Luna, atraído por ella y también sube en el lado opuesto, como si hubiera una fuerza de repulsión. Pero el hecho más importante que nos muestra la ecuación es que la marea crece en proporción inversa al cubo de la distancia. Es la razón por la que la marea solar es menor que la lunar, porque la Luna está mucho más cerca de nosotros y esa cercanía compensa y supera la enorme masa del Sol.

Este análisis se puede aplicar a otros cuerpos del Sistema Solar o incluso a objetos intergalácticos (por ejemplo una galaxia y un cúmulo globular satélite de la misma), siempre y cuando se conozcan las masas y las distancias. Nos encontramos entonces con curiosidades como que la marea que Júpiter produce sobre el satélite Io, es más de cinco mil veces la que la Luna le produce a la Tierra.

En la siguiente tabla se muestran esas aceleraciones de marea (comparadas con la de la Luna sobre la Tierra), para diferentes cuerpos del Sistema Solar.

Cuerpo primario	**Cuerpo secundario**	**Fuerza de marea**
Luna	Tierra	1
Sol	Tierra	0,46
Ganímedes	Júpiter	1
Sol	Venus	1,15
Tierra	Luna	22
Sol	Mercurio	27
Caronte	Plutón	33
Marte	Deimos	39
Júpiter	Calisto	83
Saturno	Titán	97
Plutón	Caronte	119
Neptuno	Tritón	374
Júpiter	Ganímedes	493
Saturno	Dione	714
Urano	Ariel	869
Urano	Miranda	1131
Júpiter	Europa	1193
Marte	Fobos	1221
Saturno	Tetis	1423
Saturno	Encelado	1500
Saturno	Mimas	1898
Júpiter	Io	5559